Modul Geometrie 29. Oktober 2008
Wintersemester 2008-2009
Schmale

Aufgaben

(7) Seien $a^{(0)} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $a^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$, $a^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $a^{(3)} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $a^{(4)} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix}$, $a^{(5)} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ in $\mathbb{Q}^n$.

(a) Bestimmen Sie eine affine Basis des Verbindungsraumes Y (affine Hülle) der gegebenen Punkte.

(b) Bestimmen Sie die affinen Koordinaten des Punktes $p = \begin{bmatrix}4\\3\\3\\4\end{bmatrix}$ [3] aus Y bezüglich einer von Ihnen gewählten Basis von $\overrightarrow{Y}$.

(c) Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten von p bezüglich der von Ihnen bestimmten affinen Basis von Y.

(8) **(a)** Sei Y ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^3$ im Sinne der linearen Algebra, etwa $Y = a + U$ mit $a \in \mathbb{R}^3$ und mit einem Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass (Y, U, φ) dann auch ein (allgemeiner) affiner Raum ist mit der Abbildung $\varphi : Y \times Y \to U, (p, q) \mapsto q - p$. Überlegen Sie, ob auch andere Abbildungen ψ statt φ in Frage kommen, bezüglich derer (Y, U, ψ) nach der Definition 2 im § 1 der Vorlesung ein affiner Raum ist und formulieren Sie ausführlich Ihre Überlegungen und deren Ergebnisse.

(b) Seien $A, C \in \mathbb{R}^{2\times2}$ und $X = \{B \in \mathbb{R}^{2\times2} : \; AB = C\}$. Begründen Sie, warum X ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times2}$ ist.

(c) Ist für fest vorgegebenes $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times2}, \; B \mapsto (A + B)(A - B) + B^2$$

eine affine Abbildung?

Die jeweils gewählte Dimension und der gewählte Körper sollen in ein vertrautes Szenario führen, sind aber nicht wesentlich für die Anliegen der Aufgabenteile.

(9) **(a)** Bei einer echten Dilatation ist das Bild einer Graden Γ eine zu Γ (strikt) parallele Grade. [4]

(b) Die Hintereinanderausführung zweier Dilatationen nach Beispiel 3(d) in § 2 ist wieder eine Dilatation.

....

[3] Auf dem in der Vorlesung verteilten Aufgabenblatt war versehentlich 2 als letzter Eintrag von p angegeben worden. Dann liegt p überhaupt nicht in Y, und es konnte dann entsprechend nur genau dieses nachgewiesen werden.

[4] Zwei affine Unterräume Γ, Γ' heißen (schwach) parallel, wenn $\overrightarrow{\Gamma} \subseteq \overrightarrow{\Gamma'}$ oder $\overrightarrow{\Gamma'} \subseteq \overrightarrow{\Gamma}$ und (strikt) parallel, wenn = zutrifft. In der Literatur ist der Sprachgebrauch uneinheitlich.